

Geometrie

1. Vektoren

Die Menge aller zueinander parallelen, gleich langen und gleich gerichteten Pfeile werden als **Vektor** bezeichnet. Jeder einzelne Pfeil heißt **Repräsentant** des Vektors.

Ortsvektoren:

Gegenvektor:

2. Addition und Subtraktion von Vektoren

Bei der **Addition von Vektoren** erhält man einen Repräsentanten des Summenvektors $+$, indem man die Repräsentanten von $+$ aneinanderfügt:

$$+ = +$$

Für die Vektoraddition gelten die gleichen **Rechengesetze** wie für die Addition von Zahlen:

Kommutativgesetz: $+$ $=$ $+$

Assoziativgesetz: $+$ $+$ $=$ $(+)$ $+$ $=$...

3. Multiplikation mit einer Zahl

$$r \cdot + =$$

- r -mal so lang wie
- parallel zu $+$ und gleich gerichtet für $r > 0$ bzw. entgegen für $r < 0$

Linearkombination: $r_1 \cdot + + r_2 \cdot + + \dots + r_n \cdot +$ ($n \in \mathbb{N}$)

4. Betrag und Länge FS S.68

Unter dem **Betrag eines Vektors** versteht man die Länge des Vektors inkl. Repräsentanten. Der Betrag von $+$ wird mit $|+|$ bezeichnet.

$$\text{Für } + = + \text{ gilt } |+| =$$

Einen Vektor mit dem **Betrag 1** nennt man **Einheitsvektor** unter der Bedingung, dass $+$ $\neq 0$.

5. Skalarprodukt und Größe von Winkeln FS S.68

Ist φ der Winkel zwischen. Für das **Skalarprodukt** gilt:

$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \quad \text{Beachte: für } 0^\circ < \varphi < 90^\circ \text{ gilt } > 0 \text{ und} \\ \text{für } 90^\circ < \varphi < 180^\circ \text{ gilt } < 0.$$

Für \vec{a} mit $\neq 0$, $\vec{b} \neq 0$ gilt: genau dann, wenn $= 0$.

Sonderfälle: Buch 11. Klasse S.107

6. Das Vektorprodukt FS S.68

\vec{x} heißen **Vektorprodukt** oder **Kreuzprodukt**. Der entstehende ist orthogonal zu
Sind die Vektoren parallel so gilt $\vec{x} = \vec{0}$.

Die Maßzahl des **Flächeninhalts** des von den Vektoren aufgespannte **Parallelogramms** beträgt
 $|\vec{x}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$. (! Nicht vertauschen mit 5. (siehe oben))

Die Maßzahl des **Volumens** von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und aufgespannten **Spats** beträgt $|\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle|$.

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot V_{\text{Prisma}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot V_{\text{Spat}} = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{Spat}}$$

7. Kreise und Kugeln FS S.68

Eine Kugel im 3-dimensionalen Raum mit dem Mittelpunkt $M(m_1|m_2|m_3)$ und dem Radius r wird beschrieben durch: $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$

8. Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ heißen **linear abhängig**, wenn mindestens einer dieser Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren darstellbar ist. Andernfalls heißen die Vektoren **linear unabhängig**.

Im \mathbb{R}^2 sind **höchstens zwei** Vektoren, im \mathbb{R}^3 sind **höchstens drei** Vektoren **linear unabhängig**. Jeder weitere Vektor lässt sich eindeutig als Linearkombination dieser linear unabhängigen Vektoren darstellen.

9. Geraden FS S.68

Jede Gerade g lässt sich durch eine Gleichung in der sogenannten **Parameterform** mit dem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ beschreiben.

$$\vec{r} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{d}$$

A: Aufpunkt : Ortsvektor : Richtungsvektor ($\neq 0$)

10. Gegenseitige Lage von Geraden

Vorgehensweise: 1. Auf **Abhängigkeit** untersuchen

abhängig
g parallel zu h

unabhängig
g nicht parallel zu h

2. Punktprobe

Liegt der Aufpunkt von g auf h?

Schnittpunkt vorhanden?

$g = h$

$g \parallel h; g \neq h$

g und h schneiden sich

g und h sind windschief

11. Ebenen

Parameterform FS S.68

Jede Ebene lässt sich durch die **Ebenengleichung in Parameterform** beschreiben. Hierbei ist der Ortsvektor eines Aufpunktes \vec{A} und \vec{d}_1, \vec{d}_2 sind **zwei linear unabhängige Richtungsvektoren**.

$$\vec{r} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{d}_1 + \mu \cdot \vec{d}_2$$

Normalenform FS S.68

Jede Ebene lässt sich durch die **Ebenengleichung in Normalenform** beschreiben. Die Ebene E ist durch den Aufpunkt A und einen Normalenvektor \vec{n} festgelegt.

Vektordarstellung: $(\vec{r} - \vec{A}) \cdot \vec{n} = 0$

Koordinatendarstellung: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$ mit $n_0 = - (n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3)$

Um den Normalenvektoren herauszufinden, bildet man das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren!

Hesse'sche Normalenform **(nicht in der FS!)**

Vektordarstellung: $(\vec{r} - \vec{A}) \cdot \vec{n} = 0$

Koordinatendarstellung: $|Ax + By + Cz + D| = 0$

Dabei ist das Vorzeichen vor der Wurzel so zu wählen, dass $D < 0$ wird.

12. Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

Die gegenseitige Lage der Gerade $g: \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{d}$ und der Ebene $E: \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ lässt sich bestimmen, indem man die Anzahl der gemeinsamen Punkte von g und E untersucht. Setzt man den Ortsvektor aus der Gleichung g in die Normalengleichung für E ein, so erhält man eine Gleichung zur Bestimmung der Parameterwerte für die gemeinsamen Punkte.

- Genau eine Lösung: g und E schneiden sich in einem Punkt.

Gilt $\vec{d} \perp \vec{n}$, so sind $g \perp E$

- Keine Lösung: $g \parallel E$
- Unendliche viele Lösungen: $g \subset E$

Spiegelung eines Punktes an einer Geraden (Abb. S.135/10)

1. Man stellt die Gleichung der Ebene E in Normalenform auf. Der Richtungsvektor der Geraden ist der Normalenvektor von E . Außerdem befindet sich der Punkt P in der Ebene.
2. Schnittpunkt von E und g berechnen \rightarrow Lotfußpunkt F
3. Um P' zu erhalten, muss der Vektor \vec{PF} zu $\vec{PP'}$ addiert werden.

Gemeinsame Lotgerade zu zwei windschiefen Geraden (Abb. S.136/12)

ist der Richtungsvektor der Geraden g und der Geraden h . Außerdem ist l die Lotgerade.

1. Man bestimmt den Richtungsvektor der Geraden l über das Kreuzprodukt.
2. Jetzt bestimmt man den Normalenvektor von E mithilfe von $E: \vec{n} = \vec{d} \times \vec{d}$
3. Mit dem Aufpunkt der Geraden g und dem Normalenvektor kann die Normalengleichung von E bestimmt werden: $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

Die Ebene E schneidet die Gerade h in S .

4. Somit lautet die Gleichung der Geraden $l: \vec{r} = \vec{r}_0 + \sigma \vec{d}$

13. Gegenseitige Lage von Ebenen

Vorgehensweise

1. Sind die **Normalenvektoren linear abhängig?**

2. Punktprobe
gemeinsamer Punkt?

bzw.

Lösen des Gleichungssystems
aus der Koordinatenstellung

$E=F$

$E \parallel F$ und $E \neq F$

Schnittpunkte bilden eine Gerade

14. Abstände bestimmen (S.140-142)

Punkt – Gerade

1. Aufstellen der Gleichung einer Ebene E, die P enthält und senkrecht zu g ist.
2. Bestimmen des Schnittpunktes F der Ebene E mit der Geraden g.
3. Berechnen des Abstands der Punkte P und F.

Punkt – Ebene

1. Möglichkeit über die HNF:

Vektorendarstellung: $\vec{r}_0 \cdot \vec{n} = 0$ $d = |\vec{r}_0 \cdot \vec{n}|$

Koordinatendarstellung: $ax + by + cz = d$ $d = |d|$

Sonderfall: $|d|$ ist der Abstand des Ursprungs 0 von E an.

2. Möglichkeit: Lot fallen von P auf E

Ebene – Ebene

Den Abstand **zweier paralleler Ebenen** E_1 und E_2 bestimmt man, indem man den Abstand eines beliebigen Punktes der Ebene E_2 von der Ebene E_1 berechnet, also **Punkt – Ebene**.

Ebene – Gerade

Den Abstand einer Ebene E von einer **zu E parallelen Geraden g** bestimmt man wie bei **Punkt – Ebene**.

Gerade – Gerade

Für die Berechnung des Abstands zweier windschiefen Geraden stellt man eine Hilfsebene E auf, die g enthält und parallel zu h ist. Dann löst man die HNF auf und verwendet für einen Punkt, welcher auf h liegt.

15. Schnittwinkel FS S.68

Zweier Geraden

Der Schnittwinkel ist gleich dem spitzen Winkel α , den die Richtungsvektoren festlegen. (Skalarprodukt FS S.68)

Gerade – Ebene

Zuerst wird der spitze Winkel β berechnet, welcher vom Richtungsvektor der Geraden und dem Normalenvektor der Ebene eingeschlossen wird. Danach gilt: $\alpha = 90^\circ - \beta$

Zweier Ebenen

Der Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen ist gleich dem spitzen Winkel α , den die Normalenvektoren einschließen.